MICKAËL LAUNAY

TEOREMA UMBRELEI

SAU ARTA DE A OBSERVA LUMEA CU BUN-SIMȚ

Ilustrații de **Chloé Bouchaour**

Traducere din limba franceză de
Valentin Protopopescu

TREI

Editori:
Silviu Dragomir
Vasile Dem. Zamfirescu

Director editorial:
Magdalena Mărculescu

Redactare:
Irina Tudor Dumitrescu

Design și ilustrație copertă:
Andrei Gamarț

Director producție:
Cristian Claudiu Coban

Dtp:
Mirela Voicu

Corectură:
Oana Apostolescu
Dușa Udrea-Boborel

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
LAUNAY, MICKAËL
Teorema umbrelei sau arta de a observa lumea cu bun-simț / Mickaël Launay ; il. de Chloé Bouchaour ; trad. din lb. franceză de Valentin Protopopescu. - Bucureşti : Editura Trei, 2022
ISBN 978-606-40-1385-9

I. Bouchaour, Chloé (il.)
II. Protopopescu, Valentin (trad.)

0

Titlul original: Le théorème du parapluie ou L'art d'observer le monde dans le bon sens
Autor: Mickaël Launay
Ilustrații: Chloé Bouchaour

O.P. 16, Ghișeul 1, C.P. 0490, București
Tel.: +4 021 300 60 90 ; Fax: +4 0372 25 20 20
e-mail: comenzi@edituratrei.ro
www.edituratrei.ro

ISBN: 978-606-40-1385-9

Cuprins

Introducere....7

Partea I. Legea supermarketurilor 11

Legea lui Benford....11
Gândirea multiplicativă....18
Simțul înnăscut al numerelor 26
Scribi fără zero şi virgulă 39
Puntea logaritmică....47
De ce este lumea multiplicativă? 59

Partea a II-a. Mere şi luni....67

Cel mai înalt vârf al lumii 67
Ce sunt numerele?....76
Despre utilitatea umbrelelor....87
Permanent totul cade în tot locul....94
Succesul teoriei gravitației....103
Forma Terrei 112

Partea a III-a. Meandrele infinitului 123

Pe lungimea frontierelor 123
Imensitate şi infinit....130
Infinitul cu ciocolată 141
Linia întortocheată a lui Peano 153
Cele trei dimensiuni ale lui Euclid din Alexandria....161

Spre cea de-a patra dimensiune şi dincolo de ea 170
Dimensiunea fractală 176

Partea a IV-a. Arta confuziei..................................**185**

Al cincilea postulat al lui Euclid 185
Iluzia culorilor 196
Matematica lui quiproquo 205
A gândi corect fără a şti despre ce vorbim...............................214
Geometria deformată a aviatorilor 222
Rezolvarea problemei..236

Partea a V-a. Abisurile spaţiului şi timpului.....**245**

Cu ce viteză vă deplasaţi? 245
Relativitatea restrânsă 256
Noţiunea de spaţiu–timp 267
$E = mc^2$ 280
Relativitatea generală..293
În căutarea găurilor negre...307

Ca să mergem mai departe…................................**320**

Introducere

În 1980, cadre didactice de la Institutul de Cercetare asupra Predării Matematicii din Grenoble au propus unui grup de copii următoarea problemă:

Pe un vapor sunt 26 de oi şi 10 capre: ce vârstă are căpitanul?

Întrebarea este ciudată. Ce legătură să fie între vârsta căpitanului şi numărul de oi şi capre? Şi totuşi, 75 % dintre aproape două sute de elevi cu vârste între şapte şi opt ani au oferit un răspuns fără să stea pe gânduri. Mulți au adunat şi au obținut un total de 36. Dar, când acelaşi test a fost propus unor copii cu vârste între nouă şi zece ani, cei mai mulți au început să protesteze sau chiar să refuze să răspundă. Doar 20 % au răspuns fără ezitare. În doi ani, spiritul critic se ascuțise. Copiii mai mari câştigaseră în perspicacitate, dând înapoi în fața unei cerințe fără sens.

Pe când aveam şi eu vârsta lor, trebuie să recunosc că încercam o anumită plăcere în fața enigmelor cu capcane. A acelora care ne pun mintea la încercare şi care, în fond, sunt mai curând glume decât adevărate probleme de matematică. Una dintre preferatele mele era următoarea:

O orchestră de 50 de muzicieni interpretează Simfonia numărul 9 de Beethoven în 70 de minute. Cât timp ar lua unei orchestre de 100 de muzicieni să cânte aceeaşi simfonie?

Fireşte, durata unei simfonii nu depinde de numărul muzicienilor din orchestră, 70 de minute rămân 70 de minute. În mod deosebit îmi plăcea şi aceasta: *Ce cântăreşte mai greu, un kilogram de pene sau un kilogram de plumb?* Niciunul, desigur, deoarece greutatea lor este aceeași: un kilogram.

Ceea ce ignoram în acea perioadă e faptul că procesul de familiarizare cu sensul lucrurilor putea să ducă mult mai departe decât îmi imaginam eu. Cu cât progresam în cunoaştere, cu-atât descopeream mai multe subtilități în sensul cuvintelor şi mai multe goluri în înțelegerea mea despre lume. Fireşte, ca adulți nu mai cădem în aceleaşi capcane logice precum copiii. Dar ar fi o greşeală să credem că suntem feriți de toate celelalte prejudecăți care ne pândesc. Intuiția te poate înșela, iar evidența, uneori, e falsă. Cred că pot să afirm la 35 de ani că, după şcoala elementară, nu a fost an din viață în care să nu realizez că gândeam greşit despre lucruri pe care eram convins că le cunoşteam foarte bine.

Când dorim să înțelegem lumea, când suntem curioşi în legătură cu tot ce ne înconjoară, e normal să ne aşteptăm la turbulențe. În fond, marii savanți din istorie nu au făcut altceva decât aceşti copii când au „învățat“ să refuze calculul legat de vârsta căpitanului de vapor. S-au îndoit de ce aveau în fața ochilor şi au încercat să vadă mai departe. S-au revoltat împotriva ordinii stabilite. Ştiința înseamnă un minunat teren pentru a supune îndoielii ceea ce ne intrigă, iar matematica reprezintă unul dintre cele mai puternice instrumente ale sale.

A face matematică e un fel de a pătrunde în culisele lumii. Înseamnă să ne infiltrăm în spatele scenei pentru a observa uriaşele rotiţe-mecanisme care ne pun Universul în mişcare. Spectacolul este impresionant, dar el ne poate şi tulbura. Realitatea ne sfidează simţurile şi intuiţia. Ea nu este întocmai aşa cum o credem. Ne răstoarnă apriorismele şi ne mătură cele mai intime evidenţe. Detaliile cele mai anodine pot să ascundă mari mistere şi enigmele pentru copii se pot dovedi uneori mult mai profunde decât par la prima vedere.

Uite o altă problemă:

Dacă patru găini fac patru ouă în patru zile, câte ouă vor face opt găini în opt zile?

Vă las să vă gândiţi la problemă, o să revenim asupra ei. Tot ceea pot să vă spun este că atunci când am descoperit prima oară această enigmă, pe la zece ani, eram departe de a putea să-mi închipui că mă va ajuta să înţeleg într-o zi celebra formulă a tuturor timpurilor.

Însă, dacă sunteţi dispuşi să mă urmăriţi o clipă, vă propun să pornim în aventură. S-ar putea să avem parte de unele momente dificile, căci un mod de gândire nu se modifică pocnind din degete. Vor fi îndoieli ce trebuie depăşite şi gânduri care îşi aşteaptă maturizarea. Dar staţi liniştiţi, plăcerea de a înţelege recompensează de mii de ori efortul pe care-l vom face. În spatele acestei pagini începe călătoria noastră prin universul matematicii, ca să descoperim unele dintre cele mai frumoase mecanisme ascunse ale lumii în care trăim. Ridicați o clipă privirea şi observați decorul dimprejur: este posibil ca după aventura în care pornim acum să nu mai vedem Universul, lumea noastră, în felul în care suntem obişnuiți.

Partea I

Legea supermarketurilor

Legea lui Benford

Călătoria în universul matematicii începe uneori în cele mai banale locuri cu putință.

La plecare, vă propun să trecem pe la supermarketul din colț. Sigur este unul în apropierea locuinței voastre. Este chiar acela în care obişnuiți să vă faceți târguielile cotidiene. Nu contează că e un uriaş centru comercial sau un minimarket sătesc; important este că acolo găsim o varietate de produse de bază, necesare traiului zilnic.

Ambianța este una de rutină. Ați mai fost aici de sute, poate de mii de ori. Raioane paralele, etajere metalice, ritmul regulat al codurilor de bare care bipăie la casă şi clienți care înşfacă mecanic, din mers, o sticlă cu lapte sau câteva cutii de conserve. Dar azi nu facem trasee dedicate cumpărăturilor. Suntem angajați într-o misiune de observare.

În acest loc se ascunde una dintre părțile cele mai ciudate cu putință ale matematicii. Este aici, sub ochii voştri, şi asta de ani buni. Nici măcar nu este camuflată, o puteți zări chiar în clipa asta. O mică anormalitate. Unul dintre aceste detalii care vă trec pe sub nas, fără să indice absolut nimic, dar care pot trezi totuşi bănuiala observatorilor care stau cu ochii în patru. Scoateți un carnețel sau smartphone-ul, ca să consemnați, şi putem să pornim în anchetă.

Priviți prețurile care se aliniază unele în spatele celorlalte, pe întreaga întindere a etajerelor. 2,30 €... 1,08 €... 12,49 €... 3,53 €... Toate aceste numere par perfect aleatorii când le citim rapid unele după altele. 1,81 €... 22,90 €... 0,64 €... Gama prețurilor merge de la câteva centime la câteva zeci de euro. Însă nu ne vom concentra asupra detaliilor. Să uităm de virgule şi cifrele mici. La fiecare preț, să privim doar prima cifră, cea mai importantă, cea care ne oferă o idee aproximativă.

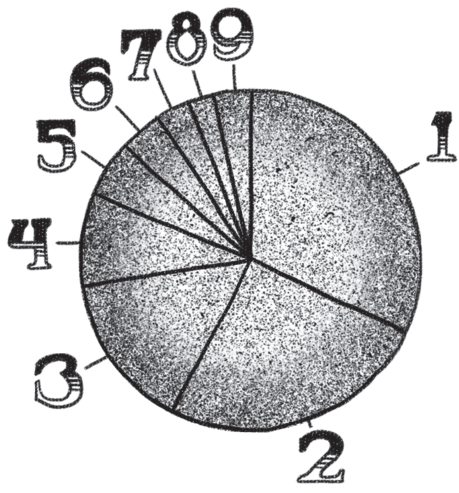
Iată o conservă de 530 de grame de varză de Bruxelles la prețul de 1,54 €. În carnețel notați 1. Ceva mai departe, un deodorant cu eficacitate de 24 de ore costă 3,53 €. Notați 3. O brânză tip camembert de 250 de grame e la 1,81 €. Veți nota din nou 1. O tigaie antiadezivă are prețul de 45,9 €, ceea ce înseamnă că de această dată am depăşit unitatea zecilor, dar nu contează, ne concentrăm doar asupra primei cifre. Notați 4. Un pachet de alune prăjite e la 0,74 €. De această dată prima cifră semnificativă este 7.

Ne mişcăm câteva minute la întâmplare şi cifrele se acumulează. 1 3 1 4 7 9 2 2 1 7 9 8 1 1 3 1 1 1 8 1 1 2 1 2 1 1 9 1 4 7 1 6 1 5 9 2 2 1 3 2 2 2 1 2 2 6... Pe măsură ce tot notați, o uşoară îndoială începe să pună stăpânire pe voi. Nu găsiți că este ceva în neregulă în acestă înşiruire de cifre? Şi pare ceva ca o formă de dezechilibru. Acest şir este compus din 1 şi 2 între care, din când în când, sunt intercalate câteva cifre de 3, 4, 5, 6, 7, 8 şi 9. Ca şi cum, fără să sesizăm asta, atenția ne este atrasă natural de prețurile cele mai mici. Şi aici avem o problemă.

Ca urmare, hai să ne purtăm ca nişte statisticieni conştiincioşi. Să ne ferim de propriile prejudecăți şi să optăm pentru o metodă sistematică. Vom alege mai multe raioane la întâmplare şi de pe fiecare dintre acestea vom reţine preţul tuturor produselor, fără excepţie. E de muncă, dar trebuie să fim exacţi.

O oră mai târziu, carnetul vă este plin de cifre în serie care defilează pe mai multe pagini. A venit vremea să facem bilanţul. După numărătoare, verdictul e fără apel şi tendinţa este confirmată. Aţi listat preţul câtorva mii de produse şi aproape un sfert din acestea începe cu cifra 1! Mai mult de un sfert începe cu 2 şi cu cât cifra este mai mare, cu-atât ea apare mai rar.

După această acţiune, iată repartizarea la care ajungem în final.



Aceste rezultate au fost obţinute de autor în ianuarie 2019 evaluând 1 226 de preţuri abordate cu metoda indicată, dintre care cele care încep cu 1: 391 (31,9%), cu 2: 315 (25,7%), cu 3: 182 (14,8%), cu 4: 108 (8,8%), cu 5: 66 (5,4%), cu 6: 50 (4,1%), cu 7: 40 (3,3%), cu 8: 30 (2,4%), cu 9: 44 (3,6%).

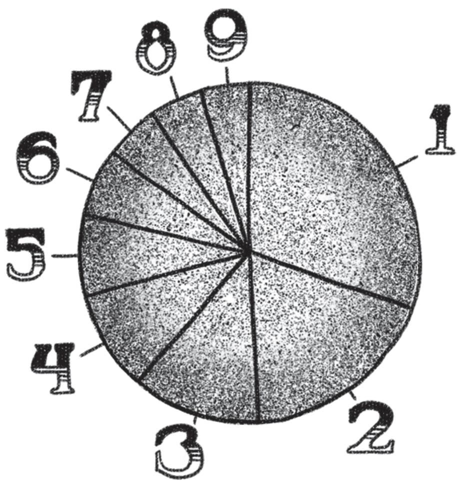
De această dată, nu se mai pune problema să credem într-un efect al întâmplării sau într-o alegere subiectivă a produselor. Trebuie să ne supunem evidenței, e deja un fapt: primele cifre ale prețurilor dintr-un supermarket nu sunt echitabil distribuite. Cifrele mici manifestă un avantaj net şi masiv.

De unde provine acest dezechilibru? Iată întrebarea pe care doream să v-o adresez. Cărei legi a supermarketurilor, comerțului sau economiei se supun aceste etichete astfel încât să conducă la un asemenea rezultat bizar? De ce primele cifre ale acestor prețuri nu sunt repartizate echitabil? În matematică nu se acordă oare importanță egală tuturor cifrelor? Ele ar trebui să fie ferite de prejudecăți, de preferințe, de favoritisme. Şi totuşi, faptele sunt clare, ele afirmând categoric exact contrariul. La supermarket, matematica are preferatele ei şi ele se numesc 1 şi 2.

Am observat. Am constatat. Acum trebuie să reflectăm, să analizăm, să decojim. Am acumulat faptele, de-acum ține de noi să conducem ancheta şi să tragem concluziile.

În martie 1938, inginerul şi fizicianul american Frank Benford publică „The Law of Anomalous Numbers“ („Legea numerelor anormale“), un articol în care analizează datele numerice rezultate din peste 20000 de observații din diverse surse. În tabelele sale se găsesc o listă a lungimilor mai multor fluvii din lume, una a populațiilor diferitelor oraşe americane, măsurători ale masei atomilor cunoscuți, numere luate la întâmplare din paginile ziarelor de informație sau constante matematice. Asupra tuturor acestor date, Benford observă de fiecare dată acelaşi lucru ca şi noi: primele cifre nu sunt repartizate echitabil. În jur de 30% din aceste numere încep cu 1. 18% încep cu cifra 2. Iar procentajul va descreşte până la cifra 9, care abia de atinge 5% din aceste valori.

Benford nu a avut ideea să-şi verifice statisticile şi pe preţurile de la supermarket. Dar puteţi ghici că rezultatele pe care le-ar fi obţinut seamănă ciudat de mult cu ale noastre. Desigur, există câteva variaţii la nivel de procentaj, însă în linii mari asemănarea este izbitoare.



Studiul lui Benford arată că datele pe care le-am cules nu sunt izolate. Ele nu sunt specifice funcţionării supermarketurilor, ci se înscriu într-o tendinţă mai amplă. După 1938, aceeaşi repartizare a fost observată de numeroşi savanţi în situaţii din ce în ce mai diverse şi extreme.

În demografie, de pildă. Printre cele 203 ţări existente pe Terra, 62 dintre ele, adică 30,5%, au o populaţie a cărei primă cifră este 1. Să începem cu cea mai populată: China, cu 1,4 miliarde de locuitori. Între cele 62 de țări regăsim şi Mexicul, cu 122 de milioane de locuitori, Senegalul, cu 13 milioane şi arhipelagul Tuvalu, cu 10 800 de locuitori. Dimpotrivă, nu sunt decât 14 țări a căror populație începe cu cifra 9, respectiv 6,9 %.

Poate că preferați astronomia? Din cele opt planete care gravitează în jurul Soarelui, patru au un diametru ecuatorial ce începe cu cifra 1. Jupiter, 142 984 de kilometri. Saturn, 120 536 de kilometri. Pământul, 12 756 de kilometri. Însuşi Soarele are un diametru de 1 392 000 de kilometri. Şi, dacă un eşantion de nouă astre nu e suficient ca să avem o tendință fiabilă, să adăugăm şi planetele pitice, sateliții, asteroizii, dar şi cometele, însă veți face mereu aceeaşi constatare: cifra 1 e net majoritară.

Din clipa în care începem să acordăm atenție acestui aspect, exemplele curg gârlă. Să luăm o listă de numere scoase din orice fel de context, să analizăm primele cifre şi o să vedem că lucrurile stau chiar aşa: repartizarea lui Benford revine mereu. Departe de a fi o excepție, această lege statistică pare una perfect naturală şi omniprezentă. În mod paradoxal, repartizarea echitabilă, care ar fi putut să ne pară a fi mai normală, este complet absentă din această lume.

La o asemenea scară, evident că nu se mai pune problema să vorbim despre bizareria de la supermarket. Ceea ce dorim să subliniem este existența unei veritabile legi ce acționează nu doar în numeroase domenii ale activității omeneşti, ci este funcțională şi în natură, ba chiar în organizarea cea mai intimă a acesteia. A înțelege această lege înseamnă a cunoaște ceva extrem de profund despre lumea noastră şi funcționarea acesteia.

Influența acestei legi este atât de puternică, încât o reproducem fără ca măcar să ne dăm seama de asta. Ființele omenești care stabilesc prețurile din supermarketuri nu se sincronizează, iar majoritatea nici măcar nu au auzit vorbindu-se de Frank Benford. Şi totuşi, fără să o ştie, ca manipulați de o forță ce îi depăşeşte, oamenii aceştia se supun legii formulate de savantul american. Aşa cum o fac şi locuitorii tuturor țărilor, lungimile fluviilor şi diametrele planetelor.

În 1938, Frank Benford numea această repartizare „legea numerelor anormale". Cu toate acestea, o astfel de denumire pare inadecvată, deoarece legea în cauză este pur şi simplu omniprezentă. Anormalitatea nu poate fi decât subiectivă, ea nu există decât pentru oamenii care se miră de existența sa. Dimpotrivă, natura pare să constate că această lege este una perfect obişnuită, comună. Legea nu este anormală decât în măsura în care nu am reuşit să o înțelegem. Dar suntem foarte hotărâți să o facem.

Însă în ce direcție să pornim? Pe ce traseu să ne înscriem gândurile ca să ridicăm voalul ce acoperă anormalitatea şi să transformăm misterul în evidență?

Legea lui Benford nu e dificil de înțeles, dar explicarea ei nu poate fi făcută în doar câteva cuvinte. Matematicile care stau în spatele său sunt simple, dar profunde. Nu ne aflăm în fața unei enigme căreia să-i găsim o soluție pe care să o descoperim după un declic urmat de o exclamație: „Ah! Asta este, i-am dat de capăt!" Nu, miza e diferită, fiind vorba despre însăşi înțelegerea noastră cu privire la numere şi la maniera noastră de a număra, una pe care trebuie să o revoluționăm. Dacă legea lui Benford nu ne apare ca fiind evidentă, asta se datorează faptului că noi gândim greşit. Se cuvine să învățăm să privim diferit ceea ce eram convinşi că ştim deja foarte bine. Trebuie să ne îndoim de noi înşine.

Dar nu e cazul să vă temeți că veți ieşi cu demnitatea şifonată în urma călătoriei în lumea pe care Frank Benford ne-o deschide în fața ochilor. Legea lui vă va schimba. Şi atunci, când veți înțelege această lege, e clar că nu veți mai gândi la fel.

Gândirea multiplicativă

Numeroase situații din viața cotidiană ne şoptesc discret că ne descurcăm greu operând cu numerele. Că este ceva care scârție.

Şi apropo de asta, am pregătită o anecdotă.

Acum câțiva ani, în timpul unei seri de joc între prieteni, unul a avut ideea să ne provoace la un tir de întrebări din zona culturii generale ştiințifice. S-au format două echipe, noi trebuind să răspundem la o serie de întrebări pe teme mergând de la matematică la geologie, trecând prin biologie sau informatică. La fiecare întrebare, echipa trebuia să formuleze o propoziție şi cea mai apropiată de răspunsul corect lua punctul. Regula părea simplă şi lipsită de ambiguitate. Cu toate acestea, o întrebare de astronomie a generat o polemică neaşteptată.

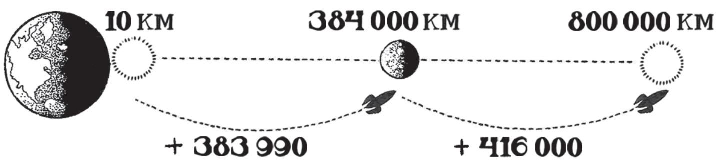
Am fost întrebați care este distanța dintre Terra şi Lună.

Nimeni din echipa noastră nu ştia răspunsul exact, dar după o scurtă consfătuire, ne-am pus de acord că răspunsul trebuie să fie 800 000 de kilometri. În echipa adversă, negocierile privind elaborarea răspunsului au fost mai tensionate, dar până la urmă au venit şi ei cu răspunsul: 10 kilometri!

Era evident că adversarii noştri ştiau şi mai puțină astronomie decât noi. Cel mai înalt vârf al globului, Everestul, se apropie de nouă kilometri. Dacă Luna nu se afla decât la 10 kilometri, ar fi fost de-ajuns să urcăm pe Everest pentru a fi pe punctul să ne atingem satelitul natural. Fireşte, răspunsul era absurd. Punctul părea deja intrat în buzunarul echipei mele.

Şi totuşi, verificarea s-a dovedit cel puțin derutantă. Luna se situează în realitate la 384 000 de kilometri de Terra. O simplă scădere a arătat că noi ne-am înşelat cu 416 000 de kilometri, în vreme ce echipa adversă nu se înşelase decât cu 383 990 de kilometri.

Am clipit şi am refăcut calculul în minte pentru a doua oară. Nicio eroare. Recunosc că am mâzgălit o mică schemă pe un şervețel ca să mă conving că aşa stau lucrurile cu adevărat.



Nu încăpea îndoială: răspunsul adversarilor era mai aproape de realitate decât răspunsul nostru. Câștigaseră. Timp de mai multe minute nu m-am putut împiedica să fac şi să refac mintal calculul, dar lucrurile erau clare. Matematica era categorică.

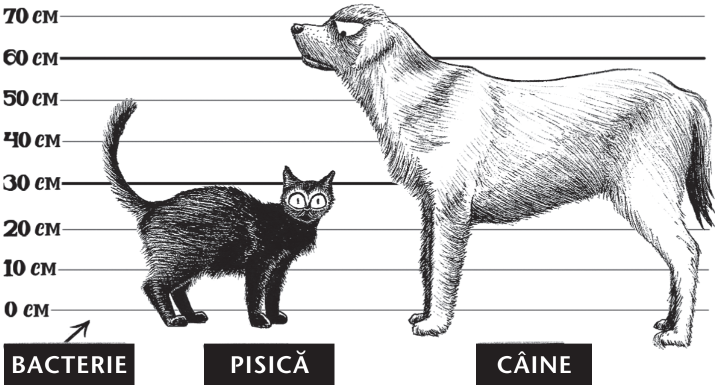
Şi totuşi, nu găsiţi că este ceva incorect în această situaţie? Cu-atât mai rău dacă o să trec drept un jucător neinspirat, dar nu aveţi impresia că, în ciuda rezultatului operaţiei de scădere, răspunsul nostru era mai judicios, mai elaborat şi, într-un fel, mai puţin fals decât cel oferit de echipa cealaltă?

Dar de ce, în acest caz, matematica pare să ne spună exact contrariul? Pentru ce calculele au tranşat disputa în favoarea răspunsului care este evident mai puţin pertinent?

Sau poate că ar fi mai simplu să reformulăm întrebarea într-un mod diferit: oare am înţeles corect matematica pe care o întrebuinţăm? Matematica nu se înşală, dar oamenii care se folosesc de ea pot uneori să o facă într-o manieră inadecvată.

Dacă ne dăm silinţa să mai cercetăm puţin, devine posibil să ne imaginăm numeroase situaţii asemănătoare. O pisică măsoară în medie 25 de centimetri şi un câine labrador, tot în medie, 60 de centimetri. Anumite bacterii măsoară o miime de milimetru. Deci este posibil să afirmăm că, din punctul de vedere al înălţimii, o pisică este mai apropiată de o bacterie decât de un labrador. Există o diferenţă de aproape 25 de centimetri între talia pisicii şi cea a bacteriei şi cam 35 de centimetri între pisică şi câine.

Încă o dată, această concluzie pe bază numerică este contrară percepţiei noastre naturale despre realitate. Pisica şi câinele aparţin aceleiaşi lumi. Se pot juca împreună sau măcar pot să interacţioneze. Se văd, se simt, ştiu mutual că există. Dimpotrivă, pisicile, dacă nu au studiat ştiinţele, nu au cum să bănuiască existenţa bacteriilor. Acestea din urmă nu fac parte din lumea lor, sunt atât de mici încât nu sunt nici vizibile, fiind practic de neconceput la acest nivel.



Prin raționamente similare, este posibil să ne înmulțim exemplele, toate aberante în fața intuiției, totuşi exacte din punct de vedere matematic. Temperatura la suprafața Soarelui este mai aproape de 5 grade Celsius decât de 15 000 de grade Celsius. Populația Parisului este mai apropiată de cea a unui sat de 12 locuitori decât de cea a New Yorkului. Dacă ați cântări planeta Marte, ați găsi că masa acesteia este mai apropiată de cea a unei mingi de ping-pong decât de cea a planetei Terra.

Ca şi în cazul legii lui Benford, dacă astfel de situații ne sfidează înțelegerea, acest lucru se datorează faptului că gândim necorespunzător. Şi asta deoarece folosim instrumente matematice pe care nu le înțelegem corect, într-un context în care sunt neadecvate.

Dar atunci cum să facem ca să aşezăm aceste reflecții intuitive în matematică? Răspunsul se găseşte în subtila noțiune a ordinului de mărime.